

Bayesianische Entscheidungsanalyse

einfach erklärt

Ein anonymes Praxisbeispiel vom Vorwissen über neue Evidenz bis zur Entscheidung

Kurzidee

Bayes beantwortet nicht direkt die Frage „Was soll ich tun?“. Bayes beantwortet zunächst: „Wie sollte ich meine Einschätzung ändern, wenn neue Information hinzukommt?“ Erst danach verbindet die Entscheidungsanalyse diese aktualisierte Einschätzung mit Nutzen, Risiken, Kosten und persönlichen Prioritäten.

Hinweis: Die Zahlen des Wetterbeispiels sind bewusst didaktisch gewählt. Sie stammen nicht aus einer empirischen Wetterstudie. Das anschließende Gesundheitsbeispiel bleibt absichtlich qualitativ, damit keine Scheingenauigkeit durch erfundene medizinische Wahrscheinlichkeiten entsteht.

1. Warum überhaupt Bayes?

Menschen entscheiden selten mit vollständiger Information. Wir beginnen mit einer Ausgangseinschätzung, erhalten neue Hinweise und sollten unsere Meinung entsprechend anpassen. Genau diesen Vorgang formalisiert der Satz von Bayes.

$$P(H | E) = P(E | H) \cdot P(H) / P(E)$$

H steht für eine Hypothese, zum Beispiel „Morgen regnet es“. **E** steht für neue Evidenz, zum Beispiel „Die Wetter-App meldet Regen“. **P(H)** ist die Ausgangswahrscheinlichkeit (Prior), und **P(H | E)** ist die nach der neuen Information aktualisierte Wahrscheinlichkeit (Posterior).

2. Zahlenbeispiel: Nehme ich morgen einen Regenschirm mit?

Eine Person möchte morgens entscheiden, ob sie einen Regenschirm mitnimmt. Sie interessiert nicht abstrakt „die Wahrheit über das Wetter“, sondern eine vernünftige Handlung unter Unsicherheit.

Größe	Didaktischer Wert	Bedeutung
P(Regen)	30 %	Ausgangswahrscheinlichkeit vor dem App-Hinweis
P(App meldet Regen Regen)	80 %	Trefferquote des Hinweises
P(App meldet Regen kein Regen)	20 %	Fehlalarmrate

Schritt 1 – Vorwissen: Vor der App-Meldung liegt die Regenwahrscheinlichkeit bei 30 %.

Schritt 2 – Evidenz gewichten: Eine Regenmeldung ist nicht gleichbedeutend mit sicherem Regen. Entscheidend ist, wie viel häufiger diese Meldung bei tatsächlichem Regen als bei trockenem Wetter auftritt.

$$\text{Bayes-Faktor} = 0,80 / 0,20 = 4$$

$$\text{Prior-Odds} = 0,30 / 0,70 \approx 0,43$$

$$\text{Posterior-Odds} = 0,43 \cdot 4 \approx 1,71$$

$$\text{Posterior} = 1,71 / (1 + 1,71) \approx 0,63 = 63 \%$$

Zwischenergebnis

Die App-Meldung erhöht die Einschätzung von 30 % auf rund 63 %. Das ist eine deutliche Aktualisierung – aber noch keine Handlungsentscheidung.

3. Von der Wahrscheinlichkeit zur Entscheidung

Nun kommt der zweite Teil hinzu: die Entscheidungsanalyse. Zwei Menschen können dieselbe Regenwahrscheinlichkeit von 63 % sehen und trotzdem vernünftigerweise unterschiedlich handeln, weil die Folgen für sie unterschiedlich sind.

Vereinfachte Kostenannahme: Den Schirm mitzunehmen verursacht eine kleine Unbequemlichkeit von 1 „Kostenpunkt“. Ohne Schirm in starken Regen zu geraten verursacht 4 Kostenpunkte. Bleibt es trocken und man hat keinen Schirm dabei, entstehen 0 Kostenpunkte.

$$\text{Erwarteter Verlust ohne Schirm} = P(\text{Regen}) \cdot 4$$

$$\text{Erwarteter Verlust mit Schirm} = 1$$

$$\text{Schwelle: } P(\text{Regen}) \cdot 4 > 1 \Rightarrow P(\text{Regen}) > 25 \%$$

Da der Posterior bei etwa 63 % liegt und damit deutlich über der Entscheidungsschwelle von 25 %, ist „Schirm mitnehmen“ unter diesen Annahmen die rationalere Handlung.

Der Kern der Entscheidungsanalyse

Bayes aktualisiert, was wir für wahrscheinlich halten. Die Entscheidungsanalyse fragt zusätzlich, welche Handlung bei dieser Unsicherheit den besten erwarteten Gesamtnutzen bzw. den geringsten erwarteten Schaden hat.

4. Übertragung auf ein anonymes Gesundheitsbeispiel

Eine fiktive Person nimmt ein Medikament und erlebt wiederkehrende Muskelkrämpfe. Die spontane Hypothese lautet: „Das Medikament verursacht die Krämpfe.“ Eine vorschnelle Entscheidung wäre, das Medikament sofort abzusetzen. Bayesianisches Denken zwingt zu einer saubereren Reihenfolge.

Schritt	Frage
Ausgangseinschätzung	Wie häufig verursacht dieses Medikament grundsätzlich solche Beschwerden? Welche anderen Ursachen sind in dieser Person plausibel?
Neue Evidenz	Treten die Beschwerden erst nach Beginn oder Dosiserhöhung auf? Sind sie beidseitig oder einseitig? Gab es die Krämpfe schon vorher?
Gewichtung	Ein zeitlich passender Beginn nach einer Dosissteigerung würde die Medikamentenhypothese stärken. Ein identischer Krampf, der schon lange vorher bestand, würde sie eher schwächen.
Entscheidung	Selbst wenn eine Medikamentenbeteiligung möglich bleibt, hängt die Handlung davon ab, wie wichtig das Medikament ist, wie schwer die Beschwerden sind und ob sichere Alternativen oder Tests existieren.

Wichtig: Hier werden bewusst keine Prozentzahlen erfunden. Ohne belastbare Basisraten und Likelihood-Ratios wäre eine Zahl wie „zu 72 % medikamentenbedingt“ mathematisch dekorativ, aber wissenschaftlich nicht gerechtfertigt.

5. Das allgemeine mathematische Modell

Für Fachleute lässt sich die Logik knapp in drei Ebenen ausdrücken.

5.1 Inferenz: Posterior

$$P(H | E) \propto P(E | H) \cdot P(H)$$

Die neue Einschätzung ergibt sich aus Vorwissen und Evidenzgewicht. In Odds-Form ist die Aktualisierung besonders transparent:

$$\text{Posterior-Odds} = \text{Prior-Odds} \cdot \text{Bayes-Faktor}$$

5.2 Entscheidung: Erwarteter Nutzen

$$EU(a) = \sum P(s | E) \cdot U(a, s)$$

Für jede Handlung a wird über mögliche Zustände s gemittelt. $U(a, s)$ bewertet, wie gut oder schlecht die jeweilige Handlung im jeweiligen Zustand ist. Gewählt wird die Handlung mit dem höchsten erwarteten Nutzen – beziehungsweise mit dem niedrigsten erwarteten Verlust.

5.3 Wert zusätzlicher Information

$$EVSI = E[\max_a EU(a | \text{neue Information})] - \max_a EU(a | \text{heutige Information})$$

Wenn eine zusätzliche Messung, Untersuchung oder Beobachtungsperiode die Entscheidung wahrscheinlich verbessert und ihr erwarteter Nutzen größer ist als Aufwand, Kosten oder Risiko der Information, kann weiteres Abklären rationaler sein als sofortiges Handeln.

6. Fünf häufige Missverständnisse

„Der Prior ist nur Vorurteil.“ Nein. Ein guter Prior fasst vorhandenes Wissen vor der neuen Information zusammen. Er muss begründbar und korrigierbar sein.

„Neue Evidenz entscheidet alles.“ Nein. Ihre Wirkung hängt davon ab, wie diagnostisch oder aussagekräftig sie tatsächlich ist.

„63 % bedeutet, dass ich handeln muss.“ Nein. Wahrscheinlichkeiten und Entscheidungsschwellen sind verschiedene Dinge.

„Eine Zahl ist wissenschaftlicher als eine qualitative Einschätzung.“ Nur wenn die Zahl auf belastbaren Daten beruht. Erfundene Präzision ist wissenschaftlich schwächer als ehrliche Unsicherheit.

„Bayes ersetzt Expertise.“ Nein. Es strukturiert Expertise: Was wissen wir schon, was lernen wir neu, wie stark ändert das unsere Einschätzung und welche Handlung folgt unter den gegebenen Zielen?

7. Praktische Kurzform für den Alltag

Eine normal gebildete Person muss keine Formeln rechnen, um bayesianisch zu denken. Fünf Fragen genügen oft:

- Was hielt ich vor der neuen Information für wahrscheinlich – und warum?
- Wie stark unterscheidet die neue Information zwischen den konkurrierenden Erklärungen?
- Welche alternative Erklärung darf ich nicht übersehen?

- Welche Folgen haben die möglichen Handlungen – bei richtiger und bei falscher Einschätzung?
- Würde eine zusätzliche Information meine Entscheidung wahrscheinlich ändern?

Merksatz

Bayesianische Entscheidungsanalyse bedeutet: mit einer begründeten Ausgangseinschätzung beginnen, neue Evidenz nach ihrer Aussagekraft gewichten, Unsicherheit offenlassen und erst danach anhand von Nutzen und Risiken entscheiden. Gute Entscheidungen müssen nicht unfehlbar sein – sie müssen unter dem damaligen Wissen nachvollziehbar und bei neuen Daten korrigierbar sein.

8. Methodische Einordnung

Das Wetterbeispiel ist ein bewusst vereinfachtes Lehrmodell. In realen medizinischen Entscheidungsproblemen sind mehrere Hypothesen, korrelierte Befunde, zeitabhängige Risiken, konkurrierende Endpunkte und patientenspezifische Nutzenfunktionen zu berücksichtigen. Das Grundprinzip bleibt jedoch identisch: Trennung von Inferenz und Entscheidung, transparente Unsicherheit, revisionsfähige Aktualisierung und explizite Berücksichtigung der Konsequenzen möglicher Handlungen.

Anonyme Lehrfassung. Keine personenbezogenen Falldaten. Keine ärztliche Verordnung, Diagnose oder individuelle Therapieempfehlung.

Bayesianische Entscheidungsanalyse

Erklärübersicht der wichtigsten Fachbegriffe und mathematischen Formeln

Leseschlüssel: Bayes trennt zwei Fragen. Erstens: Was ist nach neuen Informationen wahrscheinlich? Zweitens: Welche Handlung ist bei dieser Unsicherheit am sinnvollsten?

1. Fachbegriffe auf einen Blick

Begriff	Fachliche Bedeutung	Einfach erklärt / Beispiel
Hypothese H	Eine Annahme, deren Plausibilität geprüft wird.	Beispiel: „Morgen regnet es.“ Oder: „Ein Medikament verursacht eine beobachtete Nebenwirkung.“
Evidenz E	Neue Information, die für oder gegen eine Hypothese sprechen kann.	Beispiel: Wetter-App, Laborwert, zeitlicher Verlauf, Untersuchungsergebnis.
Wahrscheinlichkeit P(·)	Zahl zwischen 0 und 1 bzw. 0 % und 100 %.	Sie beschreibt Unsicherheit – nicht Gewissheit. 0,30 entspricht 30 %.
Bedingte Wahrscheinlichkeit P(E H)	Wahrscheinlichkeit der Evidenz, falls die Hypothese zutrifft.	Frage: Wie häufig würde ich diesen Hinweis sehen, wenn H tatsächlich wahr ist?
Prior P(H)	Ausgangseinschätzung vor der neuen Evidenz.	Der Prior soll vorhandenes Wissen bündeln: Basisraten, frühere Daten, Kontext.
Likelihood	Aussagekraft der beobachteten Evidenz unter einer Hypothese.	Nicht: „Wie wahrscheinlich ist H?“ Sondern: „Wie gut erklärt H genau diese Beobachtung?“
Posterior P(H E)	Aktualisierte Einschätzung nach Berücksichtigung der Evidenz.	Der Posterior wird zum neuen Ausgangspunkt, sobald weitere Informationen hinzukommen.
Odds	Alternative Schreibweise einer Wahrscheinlichkeit: $p / (1-p)$.	30 % Wahrscheinlichkeit entsprechen Odds von 0,30 / 0,70 $\approx$ 0,43.
Prior-Odds	Odds vor der neuen Evidenz.	Sie enthalten dieselbe Information wie der Prior, nur in einer für Bayes-Faktoren praktischen Form.
Posterior-Odds	Odds nach der Aktualisierung.	Posterior-Odds = Prior-Odds $\times$ Bayes-Faktor.
Bayes-Faktor (BF)	Verhältnis dafür, wie viel besser die Evidenz eine Hypothese als ihre Alternative erklärt.	BF > 1 stärkt H; BF < 1 schwächt H; BF $\approx$ 1 verändert die Einschätzung kaum.

Begriff	Fachliche Bedeutung	Einfach erklärt / Beispiel
Trefferquote / Fehlalarmrate	Wie oft ein Hinweis bei wahrem bzw. falschem Zustand auftritt.	Im Lehrbeispiel: Regenmeldung bei Regen = 80 %, bei Trockenheit = 20 %.
Entscheidungsschwelle	Wahrscheinlichkeit, ab der eine Handlung unter den angenommenen Folgen günstiger wird.	Sie hängt nicht nur von Wahrscheinlichkeit, sondern auch von Nutzen, Schaden, Kosten und Präferenzen ab.
Nutzen $U(a,s)$	Bewertung einer Handlung a im möglichen Zustand s .	Ein Nutzen kann positiv oder negativ sein. In einfachen Beispielen arbeitet man auch mit „Kostenpunkten“.

2. Mathematische Formeln und ihre Bedeutung

Formel / Konzept	Mathematische Schreibweise	Bedeutung in Alltagssprache
Bayes-Satz	$P(H E) = P(E H) \cdot P(H) / P(E)$	Aktualisiert die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese H , nachdem Evidenz E beobachtet wurde.
Proportionale Bayes-Form	$P(H E) \propto P(E H) \cdot P(H)$	Merksatz: Posterior $\propto$ Evidenzgewicht $\times$ Vorwissen. Der Normierungsfaktor $P(E)$ wird hier nicht ausgeschrieben.
Odds aus Wahrscheinlichkeit	$\text{Odds} = p / (1 - p)$	Wandelt eine Wahrscheinlichkeit in ein Chancenverhältnis um. Beispiel: $p = 0,30 \rightarrow \text{Odds} \approx 0,43$.
Wahrscheinlichkeit aus Odds	$p = \text{Odds} / (1 + \text{Odds})$	Rückumwandlung der Odds in eine verständliche Wahrscheinlichkeit.
Bayes-Faktor	$\text{BF} = P(E H) / P(E \neg H)$	Misst das Evidenzgewicht: Wie viel häufiger tritt E auf, wenn H wahr ist, als wenn H nicht wahr ist?
Odds-Aktualisierung	$\text{Posterior-Odds} = \text{Prior-Odds} \cdot \text{BF}$	Die kompakte Rechenregel für eine Bayes-Aktualisierung.
Erwarteter Nutzen	$EU(a) = \sum P(s E) \cdot U(a,s)$	Für jede Handlung a werden mögliche Zustände s nach ihrer Wahrscheinlichkeit gewichtet und mit ihrem Nutzen verrechnet.
Erwarteter Verlust	$EL(a) = \sum P(s E) \cdot L(a,s)$	Dasselbe Prinzip wie erwarteter Nutzen, aber mit Schäden oder Kosten. Gewählt wird die Handlung mit dem kleinsten erwarteten Verlust.
Entscheidungsschwelle – Beispiel	$P(\text{Regen}) \cdot 4 > 1 \Rightarrow P(\text{Regen}) > 0,25$	Wenn „nass werden“ 4 Kostenpunkte und „Schirm tragen“ 1 Punkt kostet, lohnt sich der Schirm bereits oberhalb von 25 % Regenwahrscheinlichkeit.
Wert zusätzlicher Information (EVSI)	$EVSI = E[\max_a EU(a \text{neue Info})] - \max_a EU(a \text{heutige Info})$	Zeigt, wie viel eine zusätzliche Messung oder Untersuchung voraussichtlich wert ist, weil sie die Entscheidung verbessern kann.
Handlung a	$a \in A$	Eine wählbare Option, z. B. behandeln, beobachten, testen, abwarten.
Zustand s	$s \in S$	Ein möglicher tatsächlicher Zustand der Welt, z. B. Ursache vorhanden / nicht vorhanden.

Kurzform der gesamten Logik

1. Prior: Was hielt ich vorher für plausibel? $\rightarrow$ 2. Evidenz: Wie aussagekräftig ist die neue Information? $\rightarrow$ 3. Posterior: Wie ändert sich meine Einschätzung? $\rightarrow$ 4. Entscheidung: Welche Handlung hat unter dieser Unsicherheit den besten erwarteten Nutzen? $\rightarrow$ 5. Revision: Neue Daten können die Entscheidung verändern.

Hinweis: Die Formeln strukturieren Unsicherheit; sie erzeugen keine belastbaren Wahrscheinlichkeiten, wenn Priors, Likelihoods oder Nutzenwerte nicht durch Daten oder begründete Annahmen gestützt sind.